Condensed Mathematics Seminar Note/ 凝縮数学ゼミノート

森口湧成

2026/6/11

概要

身内の中で勝手に私が凝縮数学について喋るゼミのノートを LaTeX 化したものです。
まだまだ浅学なので、多分に誤植が含まれていますがご容赦ください。もし誤植を見つけた方は、私まで連絡していただけると大変嬉しいです。

目次

1 導入

凝縮数学を考える動機の一つは、位相的な代数系を層論的・ホモロジー代数的に扱える統一的な枠組みを与えることである。典型的な対象として、例えば次のようなものがある。

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ や $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ などの位相群の表現
- 位相群 G が位相アーベル群 M に作用するときの連続群コホモロジー。
- $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}_p$ などの位相体上の代数幾何・解析幾何。

しかしながら、このような問題を考えるために必要な代数系は位相的性質と相性が悪い：

問題 1.1
TopAb はアーベル圏ではない。そのため、derived な議論も扱えない。例えば、離散位相を入れた実数群から通常位相を入れた実数群への恒等写像

$$\mathbb{R}_{\mathrm{disc}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

は位相アーベル群の射である。これが同型でない理由は、アーベル圏であれば非自明な核または余核により説明されるべきであるが、この方法で Top Ab では説明できない。

問題 1.2
解析幾何の文脈では、$\mathrm{QCoh}(\mathrm{Spec}\, A)$ の類似を位相的に作る際に問題がある。

スキームの場合には、A-加群 M から準連接層 $\widetilde{M}$ を作り、

$$U \longmapsto M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$$

のように局所化を記述できるが、adic などの状況で

$$U \longmapsto M \widehat{\otimes}_A \mathcal{O}_X(U)$$

を作りたいとき、どの完備化を取るべきかは一般には明確でなく、適切な完備テンソル積を定義できない。

この問題は大体 solid module という p-adic な対象をうまく扱える condensed abelian group で正確に定式化できる。

凝縮数学の背景には、Bhatt–Scholze による pro-étale topology の仕事 [BS13] がある。

古典的な étale site は torsion coefficients に対してはよく機能するが、 ℓ-adic coefficients をそのまま sheaf として扱うには不十分である。 例えば、

$$H^i(X_{ét}, \mathbb{Q}_\ell) := \left(\varprojlim_n H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

のように、有限係数の cohomology の射影極限を通して $\mathbb{Q}_\ell$ 係数の cohomology を定義する。 同様に、constructible ℓ-adic complexes の導来圏についても、古典的には

$$D^b_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

を、各 n に対する有限係数の導来圏

$$D^b_c(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

の射影極限的な構成から得る、という見方をすることがある。 しかし、この記述は直感的には自然である一方で、実際には derived inverse limit や complete sheaves に関する技術的な問題をもつ。

定義 1.3

X をスキームとする。X の pro-étale site $X_{\text{proét}}$ は、大まかには次のような対象を持つ site である。

- 対象は X 上の weakly étale なスキーム。ここで、**weakly étale** とは、構造射 $f\colon Y \to X$ とその対角射 $\Delta_f\colon Y \to T \times_X Y$ が flat であることをいう。
- 被覆は fpqc site に由来する被覆。

$X_{\text{proét}}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-modules を用いて、constructible sheaves を大体、次のように定義する。

定義 1.4

sheaf C of $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-modules が **constructible** であるとは、 X の有限 stratification $X = \coprod_i X_i$ が存在して、各 stratum X_i 上で $C|_{X_i}$ が lisse となることをいう。 さらに $K \in D(X_{\text{proét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が **constructible** であるとは、K が bounded であり、すべての cohomology sheaves が constructible であることをいう。

このようにして

$$D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subset D(X_{\text{proét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を full triangulated subcategory として定義できる。 つまり、pro-étale site では、ℓ-adic sheaves を単に有限係数 sheaves の 射影系として間接的に扱うのではなく、$X_{\text{proét}}$ 上の sheaves として 直接扱うことができる。

condensed mathematics では、pro-étale site を scheme 上ではなく一点 $*$ 上の sheaves を使って位相的対象を扱うことで、derived な問題などを解消した理論である！

2 Condensed Set

定義 2.1 (Scholze, Definition 1.2)

点の pro-étale site $*_{\text{proét}}$ とは次の site である：

- 対象は profinite set S.
- 被覆は、有限個の射からなる jointly surjective な族 $\{S_i \to S\}_{i=1}^n$.

定義 2.2

condensed set とは、$*_{\text{proét}}$ 上の Set 値層のことである。condensed set の成す圏を以下で表す：

$$\mathrm{Cond(Set)} := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\text{proét}})$$

同様に、condensed group、condensed ring なども、$*_{\text{proét}}$ 上の対応する代数的構造値の層として定義される。

言い換えると、condensed set は反変関手

$$T : \{\text{profinite sets}\}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

であって $T(\emptyset) = *$ を満たし、さらに次の二条件を満たすものである。

(1) 任意の profinite sets S_1, S_2 に対して、自然な写像

$$T(S_1 \amalg S_2) \longrightarrow T(S_1) \times T(S_2)$$

が全単射である。

(2) 任意の全射 $p : S' \to S$ に対し、二つの射影 $p_1, p_2 : S' \times_S S' \to S'$ を用いて、自然な写像

$$T(S) \longrightarrow \{x \in T(S') \mid p_1^* x = p_2^* x \in T(S' \times_S S')\}$$

が全単射である。

これらは、この site 上の sheaf condition と同値である。

注意 2.3

$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Fin}) \simeq \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*) \simeq \mathrm{Set}$ であり、有限集合だけを使っても離散的な点の情報しか保たれず、本質的な位相情報は得られない。しかし、profinite sets 上で考えると、pro-étale cohomology

の話で見たように、 特定の位相的な情報も sheaf レベルで保持できるようになる。

注意 2.4

profinite sets 全体の成す圏 ProFin は large category である。実際、$\{0,1\}$ は compact Hausdorff space であり、任意の濃度 κ に対して

$$2^\kappa = \prod_{i\in\kappa}\{0,1\}$$

は Tychonoff の定理により compact Hausdorff である。κ が動くと、こうした profinite set は proper class をなす。したがって、何の制限もなく $\mathrm{Cond}(\mathcal{C}) = \mathrm{Sh}_{\mathcal{C}}(*_{\mathrm{prof}})$ と書くと、これは small でない site 上の sheaf なので large category になるが、ある特定の cardinal を固定し、small site 上の sheaves の圏として見ればこれも Grothendieck topos となる。

この問題を避けるため、uncountable strong limit cardinal κ を固定し、濃度 $<\kappa$ の profinite set だけを考える。

定義 2.5

cardinal κ が **strong limit cardinal** であるとは、 任意の cardinal $\mu<\kappa$ に対して

$$2^\mu < \kappa$$

が成り立つことをいう。 本稿では、Scholze に従い、κ は非可算な strong limit cardinal であると仮定する。

このような濃度は、例えば Beth 数

$$\beth_0 = \aleph_0, \qquad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}, \qquad \beth_\alpha = \sup_{\beta<\alpha}\beth_\beta \quad (\alpha : \text{limit ordinal})$$

を用いて、適当な極限順序数 α に対する $\beth_\alpha$ として得られる。

定義 2.6

κ を uncountable strong limit cardinal とする。$*_{\kappa\text{-proét}}$ を、濃度 $<\kappa$ の profinite set からなる site とする。被覆は有限個の jointly surjective な射の族である。

κ-condensed set とは、$*_{\kappa\text{-proét}}$ 上の Set 値層のことである。κ-condensed sets の成す圏全体を以下で表す：

$$\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}}).$$

また、2023 年に、[CS-AS] において導入された light condensed set というものも近年よく使われる：

定義 2.7

profinite set S が **light** であるとは、次の同値な条件を満たすことをいう：

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S,\mathbb{Z})$ が可算集合である。
(2) S は metrizable である。

(3) S は second countable である。

(4) S は有限集合の可算射影極限として書ける。すなわち、有限集合 S_n の列が存在して

$$S \simeq \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

と書ける。

light profinite sets からなる圏を $\mathrm{ProFin}_{\mathrm{light}}$ と書く。

定義 2.8

$\mathrm{ProFin}_{\mathrm{light}}$ に、有限個の jointly surjective な射の族を被覆として Grothendieck topology を入れる。この site を **点の light pro-étale site** と呼び、ここでは $*_{\text{light-proét}}$ または単に $\mathrm{ProFin}_{\mathrm{light}}$ と書く。

定義 2.9

light condensed set とは、$*_{\text{light-proét}}$ 上の Set 値 sheaf のことをいう。
light condensed sets の圏を

$$\mathrm{Cond}(\mathrm{Set})^{\mathrm{light}} := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\text{light-proét}})$$

と書く。

注意 2.10

$*_{\text{light-proét}}$ は small site なので、$\mathrm{Cond}(\mathrm{Set})^{\mathrm{light}}$ は Grothendieck topos である。

位相空間 T に対して

$$\underline{T}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(S, T) \qquad (S \in *_{\kappa\text{-proét}})$$

と定める。これは profinite set から T への連続写像の集合を対応させる関手である。この記法は Scholze のノートにおける T と同じ対象を表すが、本ノートでは位相空間 T と付随する凝縮集合を区別するために下線を付ける。

命題 2.11

任意の位相空間 T に対して、$\underline{T}$ は $\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ の対象である。
これを位相空間の **condensification** という。

証明 $p : S' \to S$ を $*_{\kappa\text{-proét}}$ における被覆とする。さらに $S' = \coprod_i S_i$ と書くと、確認すべき層条件は

$$\mathrm{Hom}(S, T) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(S_i, T) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(S_i \times_S S_j, T)$$

が equalizer であることである。これは

$$\mathrm{Hom}(S, T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S', T) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S' \times_S S', T)$$

が equalizer であることと同値である。

まず、$h_1, h_2 : S \to T$ が $h_1 \circ p = h_2 \circ p$ を満たすなら、p は全射なので $h_1 = h_2$ である。したがって左の写像は単射である。

次に $g : S' \to T$ が descent datum を満たすとする。すなわち

$$g \circ p_1 = g \circ p_2 \qquad (p_1, p_2 : S' \times_S S' \to S')$$

である。任意の $s \in S$ に対して $p(s') = s$ となる $s' \in S'$ を選び、

$$f(s) := g(s')$$

と定める。もし s'_1, s'_2 がともに s の逆像にあるなら、$(s'_1, s'_2) \in S' \times_S S'$ であり、descent datum より

$$g(s'_1) = g(s'_2)$$

である。したがって $f : S \to T$ は well-defined である。また定義から $f \circ p = g$ である。

ここで S', S は compact Hausdorff space であり、$p : S' \to S$ は連続全射である。compact space から Hausdorff space への連続全射は quotient map であるから、$f \circ p = g$ が連続であることから f は連続である。よって g は一意な $f \in \mathrm{Hom}(S, T)$ から来る。これで equalizer 条件が示された。 □

定義 2.12

位相空間 X が **compactly generated** であるとは、写像 $f\colon X \to Y$ について、任意の compact Hausdorff space S と任意の連続写像 $g\colon S \to X$ に対して $f \circ g$ が連続ならば、f は連続であることをいう。

任意の位相空間 X に対し、同じ集合に compact Hausdorff space からの写像で誘導される final topology を入れた空間を X^{cg} と書く。compactly generated spaces 全体は Top の full subcategory をなし、包含

$$\mathrm{CGTop} \hookrightarrow \mathrm{Top}$$

は右随伴 $(-)^{\mathrm{cg}}$ を持つ。すなわち

$$\mathrm{inc} : \mathrm{CGTop} \rightleftarrows \mathrm{Top} : (-)^{\mathrm{cg}}$$

である。

さらに、非可算強極限濃度 κ を固定する。位相空間 X が **κ-compactly generated** であるとは、濃度 $< \kappa$ の compact Hausdorff spaces S からの写像

$$\coprod_{S \to X} S \longrightarrow X$$

に関する商位相を X が持つことをいう。このとき対応する右随伴を

$$X \longmapsto X^{\kappa\text{-cg}}$$

と書く。

compact Hausdorff spaces の代わりに profinite sets を用いても同じ定義になる。実際、任意の compact Hausdorff space S は、離散集合として見た S の Stone–Čech compactification

$$\beta S^{\delta} \longrightarrow S$$

からの全射を持つ。$|S| < \kappa$ なら、βS^δ の点は S 上の ultrafilter なので

$$|\beta S^\delta| \leq 2^{2^{|S|}} < \kappa$$

となり、濃度条件も保たれる。

命題 2.13 (Scholze, Proposition 1.7)
位相空間、位相群、位相環などの圏から κ-condensed sets/groups/rings などの圏への関手

$$X \longmapsto \underline{X}$$

は faithful である。さらに、台となる位相空間が κ-compactly generated である対象の full subcategory に制限すると fully faithful である。
また、位相空間から κ-condensed sets への関手

$$X \longmapsto \underline{X}$$

は左随伴を持つ。κ-condensed set T に対し、その左随伴は集合 $T(*)$ に次の商位相を入れた位相空間 $T(*)_{\mathrm{top}}$ を対応させる。

$$\coprod_{(S,t)} S \longrightarrow T(*), \qquad (S,t) \text{ は } S \in *_{\kappa\text{-proét}},\ t \in T(S).$$

ここで各 S は profinite topology を持つ。

証明 位相空間の場合を示せば十分である。実際、位相群、位相環などの場合は、位相空間に演算写像を加えた diagram category と見れば $\underline{(-)}$ が finite products を保つことから位相空間の場合の証明から直ちに従う。

まず faithful 性を示す。連続写像 $f, g : X \to Y$ が

$$\underline{f} = \underline{g} : \underline{X} \to \underline{Y}$$

を誘導するとする。これを一点集合 $*$ で評価すると

$$f = g : \underline{X}(*) = X \longrightarrow \underline{Y}(*) = Y$$

である。したがって $X \mapsto \underline{X}$ は faithful である。

次に左随伴を構成する。T を κ-condensed set とする。$S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ と $t \in T(S)$ に対し、写像 $\theta_{S,t} : S \longrightarrow T(*)$ を次で定める。点 $s \in S$ を連続写像 $s : * \to S$ と見なし、

$$\theta_{S,t}(s) := T(s)(t) \in T(*)$$

とおく。ここで $T(s) : T(S) \longrightarrow T(*)$ は、反変関手 T を射 $s : * \to S$ に適用して得られる写像である。

集合 $T(*)$ に、すべての写像

$$\theta_{S,t} : S \longrightarrow T(*), \qquad S \in *_{\kappa\text{-proét}},\ t \in T(S),$$

に関する終位相を入れた位相空間を $T(*)_{\mathrm{top}}$ と書く。

任意の位相空間 X に対して、自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(T, \underline{X}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(T(*)_{\mathrm{top}}, X)$$

を構成する。

まず $\varphi : T \to \underline{X}$ が与えられたとする。φ を $*$ で評価して得られる写像を

$$h_\varphi := \varphi(*) : T(*) \longrightarrow \underline{X}(*) = X$$

と書く。任意の $S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ と $t \in T(S)$ に対し、自然性により次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\theta_{S,t}"] \arrow[dr, "\varphi(S)(t)"'] & T(*) \arrow[d, "h_\varphi"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

ここで

$$\varphi(S)(t) \in \underline{X}(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$$

である。したがって対角の写像 $S \to X$ は連続である。つまり、すべての $\theta_{S,t} : S \to T(*)$ に沿った合成 $S \xrightarrow{\theta_{S,t}} T(*) \xrightarrow{h_\varphi} X$ は連続である。$T(*)_{\mathrm{top}}$ はこれらの写像に関する終位相で定義されているので、h_φ は連続写像 $h_\varphi : T(*)_{\mathrm{top}} \longrightarrow X$ を定める。

逆に、連続写像 $h : T(*)_{\mathrm{top}} \longrightarrow X$ が与えられたとする。このとき各 $S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ に対して写像

$$\Phi_h(S) : T(S) \longrightarrow \underline{X}(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$$

を

$$\Phi_h(S)(t) := h \circ \theta_{S,t}$$

により定める。h と $\theta_{S,t}$ は連続なので、 $h \circ \theta_{S,t} : S \longrightarrow X$ は連続である。

この対応が S に関して自然であることを確認する。射 $u : S' \longrightarrow S$ を $*_{\kappa\text{-proét}}$ の射とする。$t \in T(S)$ に対して、$T(u)(t) \in T(S')$ である。このとき、点 $s' : * \to S'$ において

$$\theta_{S',T(u)(t)}(s') = T(s')\big(T(u)(t)\big) = T(u \circ s')(t) = \theta_{S,t}(u(s'))$$

である。したがって $\theta_{S',T(u)(t)} = \theta_{S,t} \circ u$ が成り立つ。これは次の可換図式で表される。

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\theta_{S',T(u)(t)}"'] & S \arrow[d, "\theta_{S,t}"] \\ T(*) \arrow[r, equal] & T(*). \end{tikzcd}$$

よって

$$\begin{aligned} \Phi_h(S')\big(T(u)(t)\big) &= h \circ \theta_{S',T(u)(t)} \\ &= h \circ \theta_{S,t} \circ u \\ &= \underline{X}(u)\big(\Phi_h(S)(t)\big). \end{aligned}$$

したがって Φ_h は自然変換 $\Phi_h : T \longrightarrow \underline{X}$ を定める。

以上の二つの構成

$$\varphi \longmapsto h_\varphi, \qquad h \longmapsto \Phi_h$$

は互いに逆である。したがって自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(T, \underline{X}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(T(*)_{\mathrm{top}}, X)$$

が得られる。ゆえに $T \longmapsto T(*)_{\mathrm{top}}$ は $X \longmapsto \underline{X}$ の左随伴である。

次に counit を定める。$T = \underline{X}$ とおくと $\underline{X}(*) = X$ であり、$t \in \underline{X}(S)$ は連続写像 $t : S \longrightarrow X$ そのものである。このとき点 $s : * \to S$ に対して

$$\theta_{S,t}(s) = \underline{X}(s)(t) = t \circ s$$

であるから、

$$\theta_{S,t} : S \longrightarrow \underline{X}(*) = X$$

は、もとの連続写像 $t : S \to X$ と一致する。

したがって $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}}$ は、集合 X に対し、すべての κ-small profinite set からの連続写像 $S \longrightarrow X$ に関する終位相を入れた空間である。

一方、$X^{\kappa\text{-cg}}$ は、すべての κ-small compact Hausdorff space からの連続写像に関する終位相によって定義される。しかし任意の κ-small compact Hausdorff space K は、κ-small profinite set からの全射で被覆される。実際、 $\beta(K^\delta) \twoheadrightarrow K$ があり、κ が strong limit cardinal であることから $\beta(K^\delta)$ は再び κ-small である。任意の連続写像 $K \to X$ について、次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} \beta(K^\delta) \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & K \arrow[d] \\ & X. \end{tikzcd}$$

compact Hausdorff spaces の間の全射は quotient map であるから、$K \to X$ の連続性は $\beta(K^\delta) \to X$ の連続性で判定できる。よって compact Hausdorff spaces を用いる終位相と、profinite sets のみを用いる終位相は一致する。

したがって

$$\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \cong X^{\kappa\text{-cg}}$$

であり、この同一視のもとで随伴の counit $\underline{X}(*)_{\mathrm{top}} \longrightarrow X$ は自然な写像

$$X^{\kappa\text{-cg}} \longrightarrow X$$

と一致する。

最後に fully faithful 性を示す。X が κ-compactly generated ならば $X^{\kappa\text{-cg}} \xrightarrow{\sim} X$ である。したがって任意の位相空間 Y に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})}(\underline{X}, \underline{Y}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\underline{X}(*)_{\mathrm{top}}, Y) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X^{\kappa\text{-cg}}, Y) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X, Y). \end{aligned}$$

これは $X \mapsto \underline{X}$ によって誘導される写像の逆である。ゆえに、κ-compactly generated spaces に制限すると $X \mapsto \underline{X}$ は fully faithful である。 $\square$

命題 2.14 (Comparison lemma)

site $\mathcal{C}$ と、その充満部分圏 $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ を考える。$\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ から誘導される Grothendieck topology を入れた site とする。次を仮定する。

(1) 任意の $S \in \mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{B}$ の対象からの被覆 $B \twoheadrightarrow S$ が存在する。

(2) 任意の射 $P \to S$（ただし $P \in \mathcal{B}$）と、$\mathcal{B}$ の対象からなる被覆 $Q \twoheadrightarrow S$ に対し、引き戻し $P \times_S Q \to P$ は $\mathcal{B}$ の対象からの被覆で refine できる。

(3) $\mathcal{C}$ の被覆は $\mathcal{B}$ の被覆で refine できる。

このとき、$\mathcal{B}$ は $\mathcal{C}$ の basis をなし、包含関手 $i : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$ による制限関手

$$i^* : \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathcal{B})$$

は圏同値である。

命題 2.15 (Scholze, Proposition 2.3)
濃度 $< \kappa$ の compact Hausdorff spaces からなる site を、有限個の jointly surjective な射の族を被覆として定める。この site 上の Set 値層の圏は、profinite sets への制限により

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}) \simeq \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \; (= \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}}))$$

という圏同値を得られる。

証明　示したいのは、包含 $i \colon *_{\kappa\text{-proét}} \hookrightarrow \mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ により誘導される関手

$$i^* \colon \ \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}})$$

が圏同値であることである。

まず、$*_{\kappa\text{-proét}}$ が $\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ の basis になっていることを確認する。任意の $S \in \mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ に対して、S に離散位相を入れた空間を S^δ と書く。恒等写像 $S^\delta \longrightarrow S$ は連続であるから、S が compact Hausdorff であることにより、Stone–Čech compactification の普遍性から連続写像 $p : \beta(S^\delta) \longrightarrow S$ が得られる。この写像は $S^\delta \to S$ を延長しているので全射である。また $\beta(S^\delta)$ は profinite set である。さらに $|S| < \kappa$ であり、κ は strong limit cardinal なので

$$|\beta(S^\delta)| \leq 2^{2^{|S|}} < \kappa$$

である。したがって $\beta(S^\delta)$ は κ-small profinite set である。よって任意の $S \in \mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ は、$*_{\kappa\text{-proét}}$ の対象からの被覆 $\beta(S^\delta) \twoheadrightarrow S$ を持つ。

次に、被覆の base change も $*_{\kappa\text{-proét}}$ の対象で refine できることを確認する。$P \in *_{\kappa\text{-proét}}$ とし、$\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ における射 $P \to S$ を考える。また $Q \to S$ を $*_{\kappa\text{-proét}}$ の対象からの被覆とする。このとき $P \times_S Q$ は compact Hausdorff であり、かつ κ-small である。したがって、上と同じ議論により profinite set $R := \beta\big((P \times_S Q)^\delta\big)$ と全射 $R \twoheadrightarrow P \times_S Q$ が存在する。これを図式で書くと

$$\begin{array}{ccccc} R & \twoheadrightarrow & P \times_S Q & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\!\!\downarrow \\ P & \longrightarrow & S & = & S \end{array}$$

となる。したがって、P 上に引き戻した被覆 $P \times_S Q \longrightarrow P$ は、$*_{\kappa\text{-proét}}$ の対象 R からの被覆 $R \longrightarrow P$ によって refine される。

さらに、$\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ における被覆を $*_{\kappa\text{-proét}}$ に制限すると、$*_{\kappa\text{-proét}}$ 上の被覆と同じものを与える。実際、$P \in *_{\kappa\text{-proét}}$ の $\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ における有限被覆 $\{S_j \to P\}_{j=1}^n$ が与えられたとする。各 S_j に対し

て $\widetilde{S}_j := \beta(S_j^\delta) \twoheadrightarrow S_j$ を取ると、合成 $\widetilde{S}_j \longrightarrow S_j \longrightarrow P$ は $*_{\kappa\text{-proét}}$ の射であり、$\{\widetilde{S}_j \to P\}_{j=1}^n$ は $*_{\kappa\text{-proét}}$ における有限 jointly surjective cover である。可換図式で書けば

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j=1}^n \widetilde{S}_j \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & \coprod_{j=1}^n S_j \arrow[d, two heads] \\ & P \end{tikzcd}$$

である。したがって、$\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ の被覆は $*_{\kappa\text{-proét}}$ の被覆で refine できる。

以上により、$*_{\kappa\text{-proét}}$ は $\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}$ の basis である。上で確認した三つの性質は、命題 2.14 の仮定を満たす。したがって命題 2.14 から直ちに

$$i^*\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{CHaus}_{\kappa\text{-small}}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}})$$

は圏同値である。 □

定義 2.16 (Scholze, Definition 2.4)

compact Hausdorff space S が **extremally disconnected** であるとは、任意の compact Hausdorff space からの全射

$$S' \longrightarrow S$$

が section を持つことをいう。

命題 2.17 (Scholze, Proposition 2.8)

$\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ を κ-small な extremally disconnected compact Hausdorff spaces の site とする。被覆は有限個の jointly surjective な射の族で定める。このとき

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}) \simeq \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})\ (= \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}}))$$

が成り立つ。

証明　包含関手

$$i\colon \mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}} \hookrightarrow *_{\kappa\text{-proét}}$$

による制限関手

$$i^*\colon \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}})$$

が圏同値であることを示せばよい。

まず、$\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ が $*_{\kappa\text{-proét}}$ の basis になっていることを確認する。任意の $S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ に対し、S に離散位相を入れた空間を S^δ と書く。Stone–Čech compactification により連続全射 $\beta(S^\delta) \twoheadrightarrow S$ が得られる。ここで $\beta(S^\delta)$ は extremally disconnected compact Hausdorff space である。また $|S| < \kappa$ であり、κ は strong limit cardinal なので

$$|\beta(S^\delta)| \le 2^{2^{|S|}} < \kappa$$

である。したがって $\beta(S^\delta) \in \mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ であり、任意の κ-small profinite set は、 $\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ の対象からの被覆を持つ。さらに、$S \in *_{\kappa\text{-proét}}$ の被覆

$$\widetilde{S} \twoheadrightarrow S, \qquad \widetilde{S} \in \mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}},$$

に対して、pull back $\widetilde{S} \times_S \widetilde{S}$ は再び κ-small compact Hausdorff space である。したがって同様に

$$\beta\big((\widetilde{S} \times_S \widetilde{S})^\delta\big) \twoheadrightarrow \widetilde{S} \times_S \widetilde{S}$$

という $\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ の対象からの被覆を取れる。つまり、層条件で現れる重なりも $\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}$ の対象によって refine できる。

この状況は命題 2.15 の証明と同じ comparison lemma の状況である。したがって、その証明と同様に、制限関手

$$i^* : \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}})$$

は fully faithful かつ essentially surjective である。よって、

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{Extr}_{\kappa\text{-small}}) \simeq \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}(*_{\kappa\text{-proét}}) = \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$$

が得られる。 □

注意 2.18
命題 2.15 という状況は light な状況でも成立するが、命題 2.17 という状況は light extremally disconnected compact Hausdorff spaces を用いて述べることはできない。実際、extremally disconnected compact Hausdorff space では任意の収束列は eventually constant である。一方、無限 compact metrizable space には非自明な収束列が存在する。したがって、metrizable かつ extremally disconnected な compact Hausdorff space は有限集合である。よって light extremally disconnected spaces は、Cantor set のような無限 light profinite set を被覆できず、light での類似命題は成り立たない。

注意 2.19
上で述べた、light extremally disconnected spaces で light profinite set を被覆できないというのは light の一つの問題となる。たとえば、condensed anima といった ∞-categorical な object を考えると、これは単純な ∞-sheaf として定義ができず、hypersheaf として定義する必要がある。full condensed では、

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{Ani}}(*^{\mathrm{hyp}}_{\mathrm{proét}}) \simeq \mathrm{Sh}_{\mathrm{Ani}}(*_{\mathrm{proét}})$$

ということが成り立つので問題ないが、この証明には本質的に extremally disconnected spaces の性質を用いているからである。詳しくは、[RZ26] などを参照のこと。

定義 2.20
κ を cardinal とする。κ を対応する initial ordinal と同一視する。κ の **cofinality** とは、κ の cofinal subset の濃度の最小値であり、

$$\mathrm{cf}(\kappa) := \inf\left\{ |I| \;\middle|\; \text{ある写像 } a : I \to \kappa \text{ が存在して } \sup_{i \in I} a_i = \kappa \right\}$$

により定義される。
同値に、$\mathrm{cf}(\kappa)$ は

$$\kappa = \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha, \qquad \kappa_\alpha < \kappa$$

となる増大列 $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ が存在するような cardinal λ の最小値である。

注意 2.21
Scholze, Remark 2.7 は、extremally disconnected compact Hausdorff space が condensed mathematics だけでなく、forcing と集合論のモデル構成にも深く現れることを指摘している。

まず、S を extremally disconnected compact Hausdorff space とする。このとき、S の clopen subsets 全体 $\mathrm{Clop}(S)$ は complete Boolean algebra をなす。逆に、complete Boolean algebra の Stone 空間は extremally disconnected compact Hausdorff space である。したがって、extremally disconnected compact Hausdorff spaces は、forcing で用いられる complete Boolean algebras の位相空間的表示と見ることができる。

S の clopen subsets からなる圏に、次の Grothendieck topology を入れる。$U \in \mathrm{Clop}(S)$ に対し、clopen subsets の族 $\{U_i \subset U\}_{i\in I}$ が U の被覆であるとは、$\bigcup_{i\in I} U_i \subset U$ が U の中で dense であることをいう。この site 上の sheaf の圏を $\mathrm{Sh}^\wedge(S)$ と書く。すなわち

$$\mathrm{Sh}^\wedge(S) := \mathrm{Sh}_{\mathrm{Set}}\big(\mathrm{Clop}(S), J_{\mathrm{dense}}\big)$$

である。

より一般に、$U \subset S$ が clopen subset であれば、同じ構成により $\mathrm{Sh}^\wedge(U)$ を定義できる。包含 $V \subset U$ に対しては、開部分への制限により pullback functor

$$j^*_{V,U} : \mathrm{Sh}^\wedge(U) \longrightarrow \mathrm{Sh}^\wedge(V)$$

がある。

いま点 $s \in S$ を固定する。s を含む clopen neighborhoods $U \subset S$ を動かし、pullback functors に沿って 2-category of categories における filtered colimit

$$\mathcal{M}_{S,s} := \operatorname*{2\text{-}colim}_{s\in U\subset S} \mathrm{Sh}^\wedge(U)$$

を取る。Scholze, Remark 2.7 によれば、この圏 $\mathcal{M}_{S,s}$ は ETCSR、すなわち elementary theory of the category of sets with replacement のモデルになる。ETCSR は、通常の membership-based な集合論を集合の圏という構造から記述する category-theoretic な集合論であり、ZFC と本質的に同等の役割を果たす。
この辺りの内容は、私の能力不足により何も話せないので、[BLH24] や [BB26] や [Shu18] を参照のこと。

命題 2.22 (Scholze, Proposition 2.9)
上の左 Kan 拡張から得られる関手

$$\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$$

は fully faithful である。さらに、この関手はすべての colimit と、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ に対する λ-small limit と可換である。

証明 Extr_κ を κ-small extremally disconnected sets の圏、$\mathrm{Extr}_{\kappa'}$ を κ'-small extremally disconnected sets の圏とする。包含関手を

$$i : \mathrm{Extr}_\kappa \hookrightarrow \mathrm{Extr}_{\kappa'}$$

と書く。

Scholze の [Sch26b, Proposition 2.14] により、$\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$ は $T : \mathrm{Extr}_\kappa^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ であって、有限直和を有限直積に送る関手の圏と同一視される。同様に、$\mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$ は $T' : \mathrm{Extr}_{\kappa'}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Set}$ であって、有限直和を有限直積に送る関手の圏と同一視される。このとき制限関手は

$$i^* : \mathrm{Fun}(\mathrm{Extr}_{\kappa'}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathrm{Extr}_\kappa^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}), \qquad F \longmapsto F \circ i^{\mathrm{op}}$$

であり、Kan 拡張との標準的な随伴

$$\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} \dashv i^* \dashv \mathrm{Ran}_{i^{\mathrm{op}}}$$

がある。

この同一視のもとで、命題の関手

$$\mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$$

は $T \longmapsto T_{\kappa'} := \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T$ で与えられる。すなわち、$\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}_{\kappa'}$ に対して

$$T_{\kappa'}(\widetilde{S}) = \big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(\widetilde{S}) = \operatorname*{colim}_{(i^{\mathrm{op}} \downarrow \widetilde{S})} T$$

である。

この comma 圏の対象を元の圏 $\mathrm{Extr}_{\kappa'}$ で書き直すと、それは κ-small extremally disconnected set S と射 $\widetilde{S} \longrightarrow S$ の組である。したがって

$$\big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(\widetilde{S}) = \operatorname*{colim}_{(\widetilde{S} \to S)} T(S)$$

である。ここで colimit は、κ-small extremally disconnected set S と射 $\widetilde{S} \to S$ 全体にわたって取る。

まず fully faithful 性を示す。$\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} \dashv i^*$ の unit

$$T \longrightarrow i^* \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T$$

が同型であることを確認すればよい。

$S_0 \in \mathrm{Extr}_\kappa$ とする。このとき

$$\big(i^* \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(S_0) = \big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(S_0) = \operatorname*{colim}_{(S_0 \to S)} T(S).$$

ただし S は κ-small extremally disconnected set を動く。この添字圏において $S_0 \xrightarrow{\mathrm{id}} S_0$ は終対象である。実際、任意の対象 $S_0 \to S$ に対して、それ自身を用いて一意な射

$$(S_0 \to S) \longrightarrow (S_0 \xrightarrow{\mathrm{id}} S_0)$$

が得られる。したがって

$$\operatorname*{colim}_{(S_0 \to S)} T(S) \cong T(S_0).$$

よって $T \xrightarrow{\sim} i^* \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T$ であり、unit は同型である。したがって

$$\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} : \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$$

は fully faithful である。

また $\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}}$ は左随伴であるから、すべての colimit と可換である。

残りは、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ に対する λ-small limit と可換であることを示すことである。$\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}_{\kappa'}$ を固定し、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}} := (i^{\mathrm{op}} \downarrow \widetilde{S})$ とおく。すなわち、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ の対象は $\widetilde{S} \longrightarrow S,\ S \in \mathrm{Extr}_\kappa$ であり、

$$\big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T\big)(\widetilde{S}) = \operatorname*{colim}_{S \in \mathcal{I}_{\widetilde{S}}} T(S)$$

と書ける。

よって、$\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}}$ が λ-small limit と可換であることを示すには、各 $\widetilde{S}$ について $\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ が λ-filtered であることを示せばよい。実際、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ は regular cardinal であり、Set において λ-filtered colimit は λ-small limit と可換する。

そこで、λ-small な図式 $j \longmapsto \big(\widetilde{S} \to S_j\big)$ を $\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ に取る。ここで各 S_j は κ-small extremally disconnected set である。この図式の $\mathrm{Extr}_{\kappa'}$ における極限を $L := \varprojlim_j S_j$ とおく。

まず L は κ-small compact Hausdorff space である。実際、添字圏は λ-small であり、$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ なので、$\mu := \sup_j |S_j| < \kappa$ である。したがって

$$|L| \le \prod_j |S_j| \le \mu^\lambda \le 2^{\mu\cdot\lambda} < \kappa.$$

最後の不等号は、$\mu \cdot \lambda < \kappa$ と、κ が strong limit cardinal であることによる。

L は一般には extremally disconnected とは限らないので、κ-small extremally disconnected set S と全射 $S \twoheadrightarrow L$ を取る。例えば $S := \beta(L^\delta)$ とすればよい。κ が strong limit cardinal であることから、この S は κ-small に取れる。

図式の各対象には射 $\widetilde{S} \to S_j$ が与えられているので、普遍性により射

$$\widetilde{S} \longrightarrow L = \varprojlim_j S_j$$

が得られる。さらに $\widetilde{S}$ は extremally disconnected であり、 $S \twoheadrightarrow L$ は全射なので、この射は持ち上がる。すなわち、次の可換図式を満たす射 $\widetilde{S} \to S$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[d, two heads] \\
\widetilde{S} \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & L.
\end{tikzcd}$$

各 j について合成 $S \longrightarrow L \longrightarrow S_j$ を考えると、次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[d] \\
\widetilde{S} \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & S_j.
\end{tikzcd}$$

したがって、対象 $\widetilde{S} \longrightarrow S$ は、もとの λ-small 図式の cocone を与え、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ は λ-filtered である。

また、任意の λ-small diagram $(T_a)_{a\in A}$ に対して、各 $\widetilde{S} \in \mathrm{Extr}_{\kappa'}$ で

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}}(\lim_{a\in A} T_a)\big)(\widetilde{S}) &= \operatorname*{colim}_{S\in\mathcal{I}_{\widetilde{S}}} \left(\lim_{a\in A} T_a(S)\right) \\
&\cong \lim_{a\in A} \operatorname*{colim}_{S\in\mathcal{I}_{\widetilde{S}}} T_a(S) \\
&= \left(\lim_{a\in A} \mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} T_a\right)(\widetilde{S}).
\end{aligned}$$

中央の同型は、$\mathcal{I}_{\widetilde{S}}$ が λ-filtered であり、Set において λ-filtered colimit が λ-small limit と可換することによる。

以上より

$$\mathrm{Lan}_{i^{\mathrm{op}}} : \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Cond}_{\kappa'}(\mathrm{Set})$$

は fully faithful であり、すべての colimit と $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ に対する λ-small limit と可換である。 □

定義 2.23 (Scholze, Definition 2.11)

condensed set の圏を

$$\mathrm{Cond}(\mathrm{Set}) := \mathrm{colim}_\kappa \, \mathrm{Cond}_\kappa(\mathrm{Set})$$

と定める。ここで colimit は、非可算強極限濃度全体の filtered poset に沿って取る。

注意 2.24

この colimit は大きな filtered colimit であり、一般には小さい site 上の sheaf 圏ではない。したがって、Cond(Set) は通常の意味では Grothendieck topos とはならない。

参考文献

[BB26] Nathaniel Bannister and Dianthe Basak, *Condensed Sets and the Solovay Model*, arXiv:2602.09283 [math.LO], 2026. https://arxiv.org/abs/2602.09283.

[BLH24] Jeffrey Bergfalk and Chris Lambie-Hanson, *Infinitary combinatorics in condensed math and strong homology*, arXiv:2412.19605 [math.AT], 2024. https://arxiv.org/abs/2412.19605.

[BS13] Bhargav Bhatt and Peter Scholze, *The pro-étale topology for schemes*, arXiv:1309.1198 [math.AG], 2013. https://arxiv.org/abs/1309.1198.

[CS26] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Condensed Mathematics and Complex Geometry*, arXiv:2605.11731 [math.CV], 2026. https://arxiv.org/abs/2605.11731.

[CS-AS] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Analytic Stacks*, lecture series, Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=YxSZ1mTIpaA. Accessed 2026-06-16.

[Ked] Kiran S. Kedlaya, *Notes on condensed mathematics*. https://kskedlaya.org/condensed/condensed.html.

[Lur09] Jacob Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. https://doi.org/10.1515/9781400830558.

[MM94] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Man22] Lucas Mann, *A p-Adic 6-Functor Formalism in Rigid-Analytic Geometry*, arXiv:2206.02022 [math.AG], 2022. https://arxiv.org/abs/2206.02022.

[nLab] nLab authors, *nLab*. https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage. Accessed 2026-06-16.

[RZ26] Nima Rasekh and Qi Zhu, *Fractured Structures in Condensed Mathematics*, arXiv:2603.09618 [math.AT], 2026. https://arxiv.org/abs/2603.09618.

[RC26] Juan Esteban Rodríguez Camargo, *Notes on Solid Geometry*, arXiv:2603.03012 [math.AG], 2026. https://arxiv.org/abs/2603.03012.

[Sch26a] Peter Scholze, *Lectures on Analytic Geometry*, arXiv:2605.03655 [math.AG], 2026. https://arxiv.org/abs/2605.03655.

[Sch26b] Peter Scholze, *Lectures on Condensed Mathematics*, arXiv:2605.03658 [math.NT], 2026. https://arxiv.org/abs/2605.03658.

[Shu18] Michael Shulman, *Comparing material and structural set theories*, arXiv:1808.05204 [math.LO], 2018. https://arxiv.org/abs/1808.05204.

[Sta] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu/. Accessed 2026-06-16.